Umkehrfunktionen

Ableitungen von Umkehrfunktionen

Methoden (Kehrwertformel) und Beispiele

Datei-Nr. 41 325

13. September 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

Vorwort

Nicht jede Funktion kann man umkehren. Das Paradebeispiel ist die Quadratfunktion.

$f(x) = x^2$ liefert z. B. diese zwei Zuordnungen:

$$2 \to 4, \quad -2 \to 4$$

Die Umkehrung sieht dann so aus:

$$4 \to 2, \quad 4 \to -2$$

Diese Zuordnung ist nicht mehr eindeutig, und gehört daher zu keiner Funktion mehr.

Wir beschäftigen uns hier nur mit umkehrbaren Funktionen.
Im Text 41320 wird dargestellt, dass eine Funktion umkehrbar ist, wenn sie streng monoton steigt oder fällt.

Die Gleichung der Umkehrfunktion erhält man dann durch Umstellen der Funktionsgleichung nach x.
Der Text 18810 enthält ganz viele Beispi[illegible]senstufe [illegible] und ho[illegible], für die Oberstufe lese man im Text 41320 nach.

Hier geht es nun darum, zu einer Umkehrfunktion die Ableitung zu berechnen.

Dazu zeige ich zwei Methoden.

Die erste Me[illegible] eigentlich [illegible]al:

Wenn die Gleichung der Umkehrfunktion eine "einfache" Funktion ist, deren Ableitung man wie üblich berechnen kann, dann muss man nicht weiter darüber reden.

Beispiel 1: Gegeben sei $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$.

Ihre Umkehrfunktion ist $x = g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

bzw. nach Vertauschung von x und y: $y = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Die Ableitung von g kann man wie üblich berechnen:

$$g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -\tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Daneben gibt es eine **zweite Methode,** die vor allem dann günstig ist, wenn die Gleichung der Umkehrfunktion nicht oder nur schwer so aufstellbar ist.
Dann kann man die Ableitung der Umkehrfunktion über den Kehrwert der gegebenen Funkton bestimmen.

Ich zeige das hier im Vorwort nur ganz kurz und oberflächlich, aber sehr ausführlich in diesem Text.

Man braucht die Ableitung von $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

Dann verwendet man die Kehrwertformel: $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{-2/x^3}=-\frac{x^3}{2}$ (*)

Die Ableitungsvariable ist aber y, also muss man x^3 in y umrechnen:

Aus $y=\frac{1}{x^2}$ folgt $x^2=\frac{1}{y}$, also $x=\sqrt{\frac{1}{y}}$ und daher $x^3=\sqrt{\frac{1}{y}}^3=\frac{1}{\sqrt{y}^3}=\frac{1}{y\sqrt{y}}$

Damit ändert sich $g'(y)$ so: $g'(y)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y\sqrt{y}}$

Man kann nun noch y durch x ersetzen und hat die andere Schreibweise.

Es folgt nun zunächst eine Hinführung zur Kehrwertformel und dann verschiedene Beispiele, deren Ableitungen ich mit der Kehrwertformel aber auch mit der Kettenregel-Methode berechne.

Hinführung zur Kehrwert-Formel

$\boxed{1}$ Manche Funktionen kann man umkehren, d. h. ihre Werteberechnung rückgängig machen.

Beispiel 1: Mit der **<u>linearen</u>** Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x-3$ kann man folgende Werte berechnen:

		f:	$x \rightarrow y$
$f(0)=-3$	d. h.	f:	$0 \rightarrow -3$
$f(3)=1-3=-2$	d. h.	f:	$3 \rightarrow -2$
$f(6)=\frac{1}{3}\cdot 6-3=-1$	d. h.	f:	$6 \rightarrow -1$ usw.

Die **Umkehrfunktion** g (sie wird oft mit $\bar{f}$ bezeichnet) ordnet dann dies…

		g:	$y \rightarrow x$
$g(-3)=0$	d. h.	g:	$-3 \rightarrow 0$
$g(-2)=3$	d. h.	g:	$-2 \rightarrow 3$
$g(-1)=6$	d. h…		$-1 \rightarrow 6$.

Man kann natürlich auch die Funktion f so umstellen, dass man … g … Funktion…

Man schreibt f in der Form $y=\frac{1}{3}x-3$ auf und stellt nach x um…

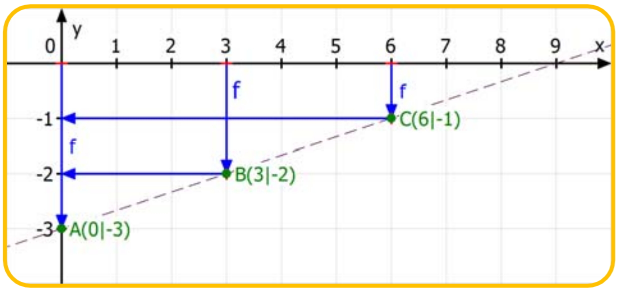
$\frac{1}{3}x=y+3 \Rightarrow$ … $x=3y+9$

Bei g ist y gegeben und x gesucht, also *umgeke*… ie be…

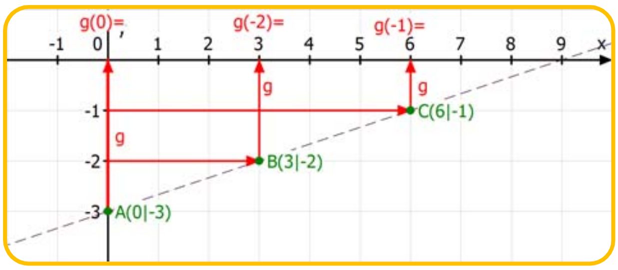
Damit kann man dann die Werte für … ekt berechnen…

$x=g(y)=3y+9$
$g(-3)=3\cdot(-3)+9=0$
$g(-2)=3\cdot(-2)+9=3$
$g(-1)=3\cdot(-1)+9=6$

Die obere Grafik zeigt die Zuordnu… durch die Funk… . Dazu beginnt man auf der x-Achse, bewegt sich dann parallel … y-Achse … zum Sch…nkt mi… Graphen von f (die schräge Gerade – die Schnittpunkte sind A, B … C) und geht v… parallel … x-Achse bis zur y-Achse. An der Pfeilspitze steht dann der Funk…wert f(x).



Die untere Grafik zeigt … umgekehrte Zuordnung g, die dem y-Wert den x-Wert zuordnet.



Es ist eigentlich verständlich, dass man für die Umkehrfunktion dieselbe Zeichnung verwenden kann, wenn man nur die Zuordnungsrichtung umkehrt.

Doch jetzt kommt die Überraschung!

Die Mathematiker verwenden die Bezeichnungen für Funktionen fast immer so, dass man die gegebene Variable auf der x-Achse anordnet und dann die Funktionfswerte auf der y-Achse.

Die soeben gezeigte Darstellung der Umkehrfunktion kommt mit nur einem Schaubild aus, weil sie die Zuordnungen einfach umkehrt.

Wenn man auch beider Umkehrfunktion die bei Funktionen übliche Reihenfolge haben, muss man am Ende noch x und y vertauschen. . Dann sieht der Ablauf so aus:

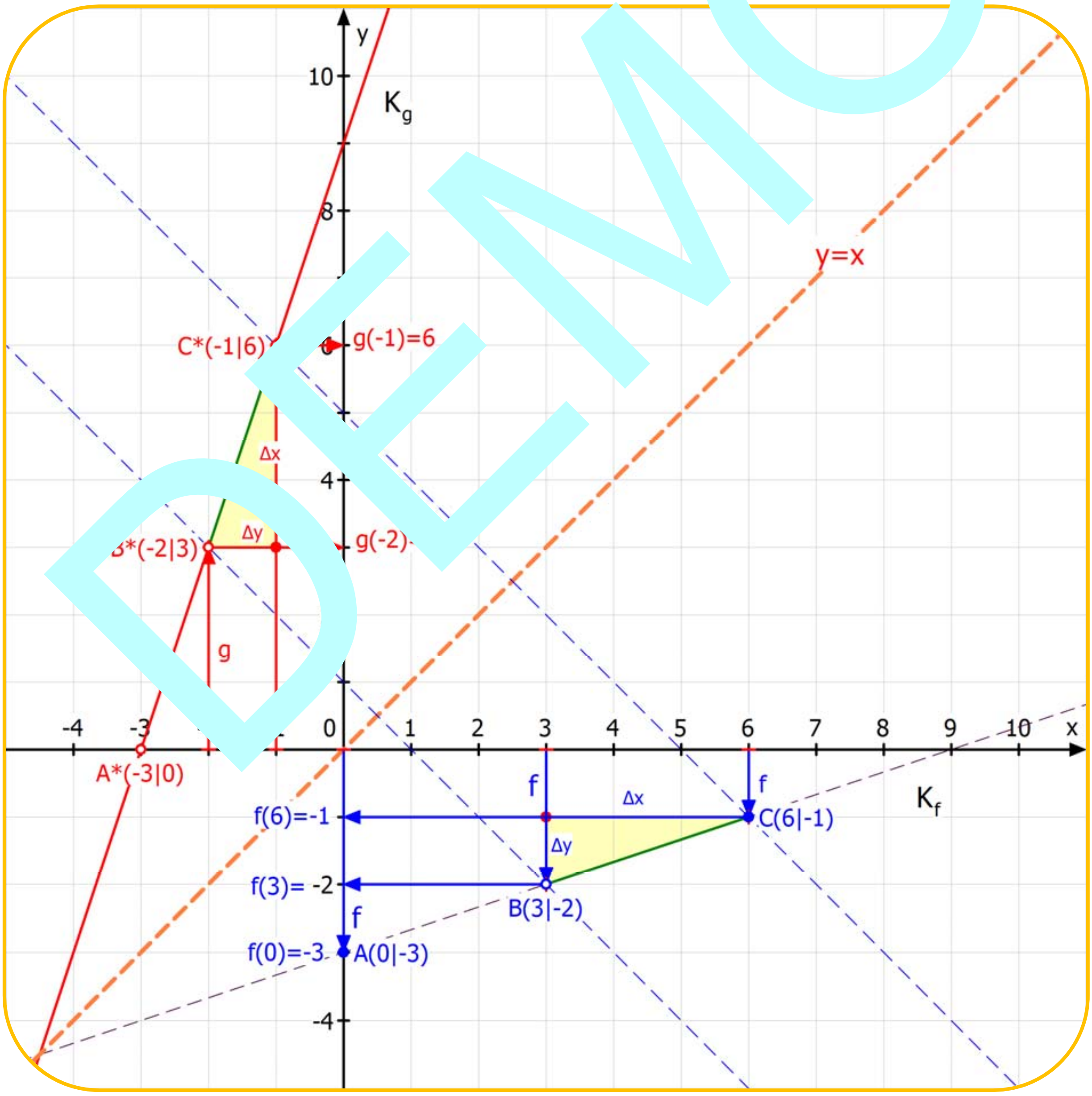
Gegebene Funktion: f: $x \to y = f(x) = \frac{1}{3}x - 3$

Umkehrfunktion: g: $y \to x = g(y) = 3y + 9$

oder nachdem x und y vertauscht worden sind:

$x \to y = g(x) = 3x + 9$

Hier die Abbildung mit gegebener Funkton f und der Umkehrfunktion g. Die Erklärung folgt auf der nächsten Seite.



Diese große Abbildung ist wichtig fürs Verständnis.
Sie enthält den Graphen der Funktion f und der Umkehrfunktion g.
Beispiel: $f(6) = -1$ wird dargestellt durch den blauen Knick-Pfeil der auf der x-Achse bei x = 6 beginnt, der dann am Punkt $C(6\,|\,-1)$ abknickt und horizontal bis zur y-Achse weiter geht bis -1 geht. Die Umkehrfunktion wird durch die Spiegelung an der Geraden y = x dargestellt, und zwar mit dem Knickpfeil, der auf der x-Achse bei x = -1 beginnt, am Punkt $C^*(-1\,|\,6)$ umbiegt und an der y-Achse bei g(-1) = 6 endet.

Die Steigung der Geraden K_f wurde mit Hilfe des gelben/blauen Dreiecks dargestellt: $m_f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Die Steigung der Geraden K_g wurde dargestellt mit Hilfe des gelben/roten Dreiecks: $m_g = \frac{\Delta x}{\Delta y}$

Wichtig ist die Erkenntnis: $\mathbf{m_g = \frac{1}{m_f}}$, d. h. Das heißt:

Die Steigung der Umkehrfunktion ist der Kehrwert der Steigung der Originalfunktion.

Bei diesem Beispiel sind die Funktionen linear. Daher ist diese Steigungs-Betrachtung einfach.
In den nächsten Beispielen werden nicht-lineare Funktionen untersucht. Dann gilt eine entsprechende Aussage für die Tangentensteigungen.

Es folgen nun einige Beispiele – ganz ausführlich

(im Original)